結び目のトポロジー

・

鮑園園　（東京大学数理科学研究科）

5/31

自己紹介と講義計画

講義の計画

5/31

- トポロジーって何？
- 結び目とは何か？

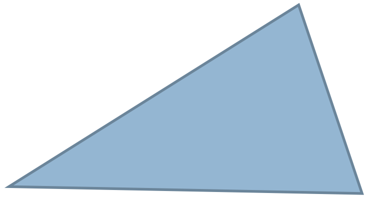
6/7

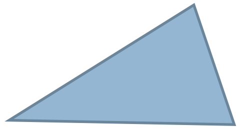
- Jones多項式ーKauffmanによる状態和模型
- 結び目と組紐群
- Yang-Baxter方程式と結び目の不変量

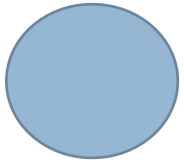
自己紹介
名前：鮑園園（バオ　ユエンユエン）
所属：東京大学大学院数理科学研究科
研究分野：（幾何学的）低次元トポロジー、
結び目理論

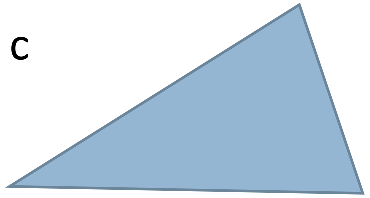
トポロジーって何？

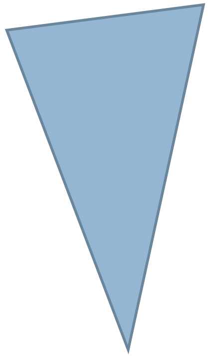
平面上の図形

問題： 次の中から、と同じ形のものを全て選びなさい。

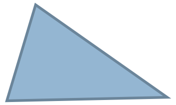
a


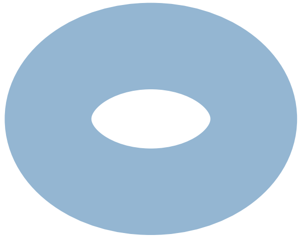
b


c


d


e


f


g


“同じ”という言葉の意味を数学的にどう解釈するかによって、答えが変わる！

“同じ＝合同” の場合

答え： c, d

任意の 2 点の距離を変えない

図形の合同

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の三角形 A と B が合同であるとは、平面の合同変換

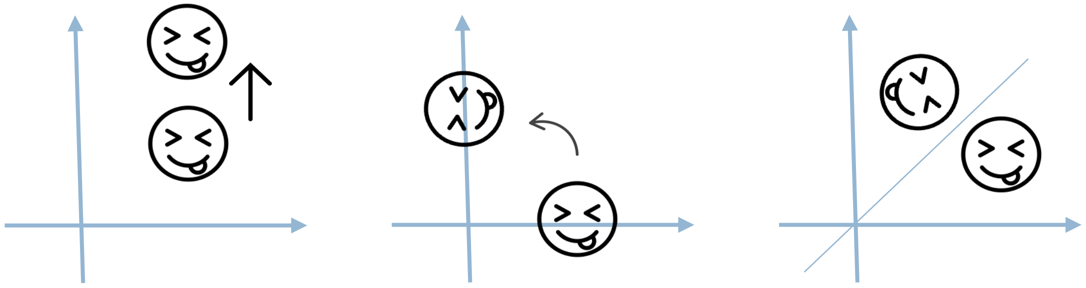
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

が存在して、$f(A) = B$ となることをいう。

平面の合同変換は次の写像の合成である。

- 平行移動
- 回転
- 鏡映写像

$\left.\begin{array}{l}\text{回転}\\ \text{鏡映写像}\end{array}\right\}$ 直交行列で表示できる



平行移動　　回転　　鏡映

“同じ＝相似” の場合

答え： a, c, d, f

線長比が保たれる

図形の相似

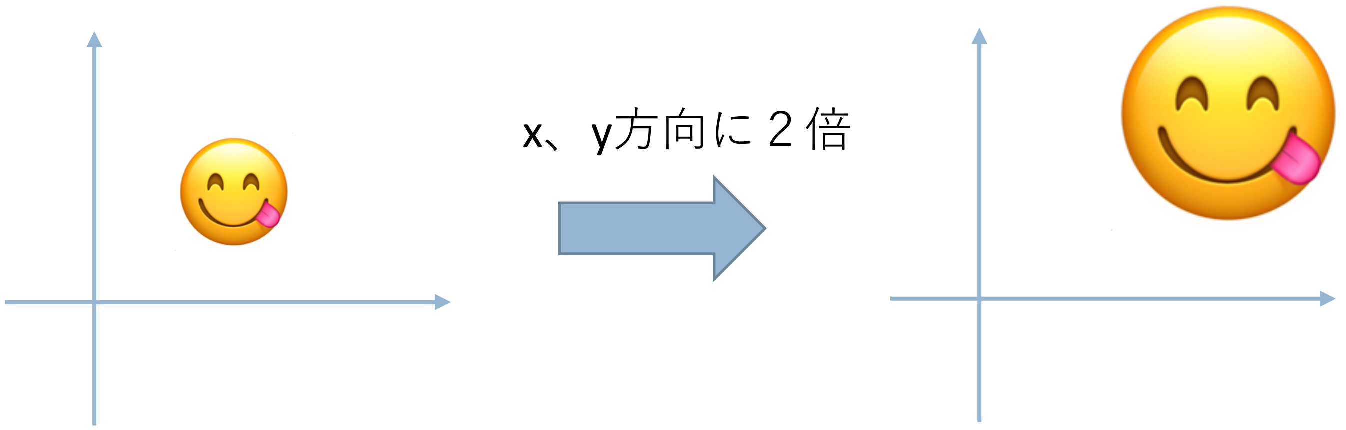
平面 $\mathbb{R}^2$ 上の三角形 A と B が相似であるとは、平面の相似変換

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

が存在して、$f(A) = B$ となることをいう。

平面の相似変換は
- 合成変換
- 拡大・縮小変換

の合成である。



拡大変換

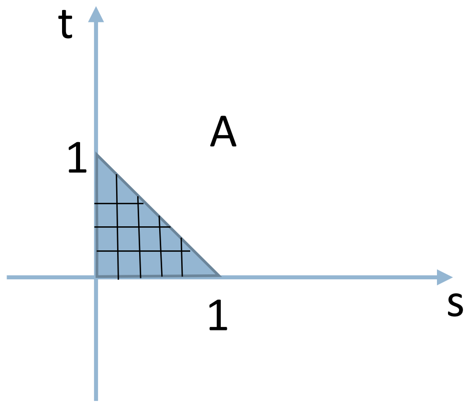
“同じ＝同相” の場合

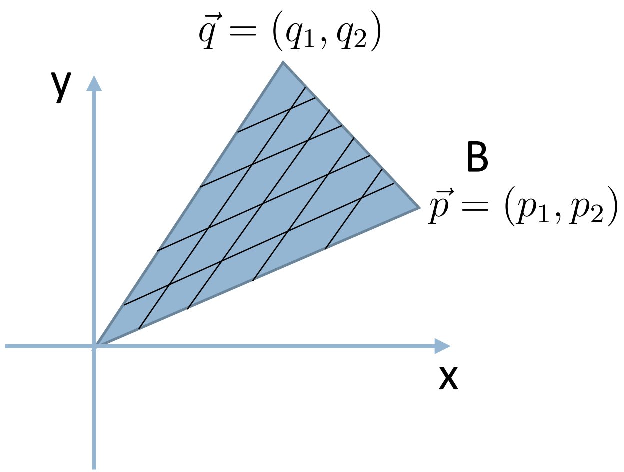
答え：a, b, c, d, e, f

図形の同相

図形 A と B が同相であるとは、全単射 $f : A \to B$ が存在して、f と f^{-1} が共に連続写像であることをいう。

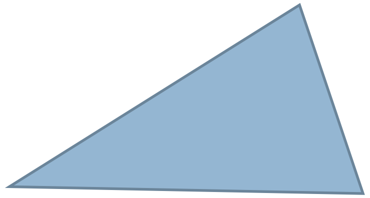
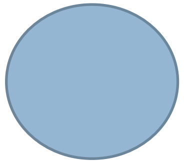
例：



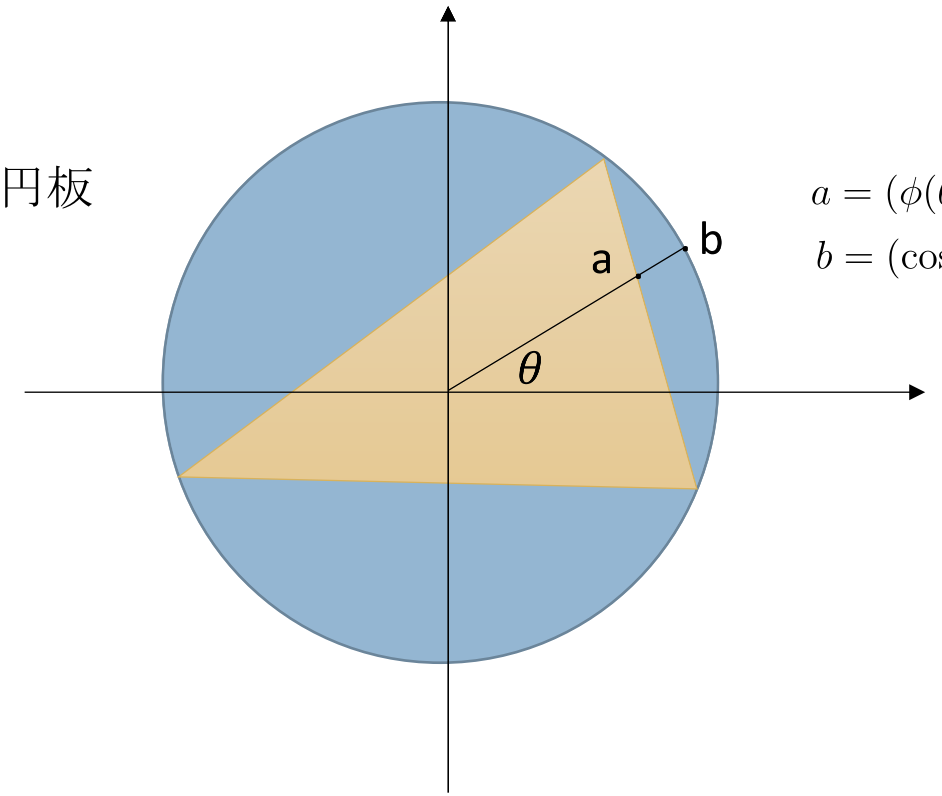


$$(s, t) \quad \to \quad s\vec{p} + t\vec{q} = (sp_1 + tq_1, sp_2 + tq_2) = (s, t)\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

結論：平面上の三角形が互いに同相である。

例：  と  が同相である。

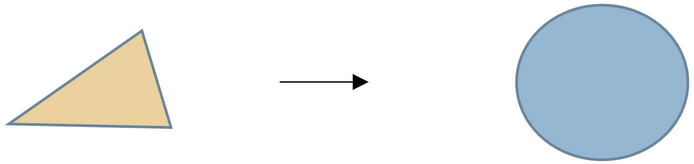
単位円板



$$a = (\phi(\theta), \varphi(\theta))$$

$$b = (\cos\theta, \sin\theta)$$

f:



$$p = (t\phi(\theta), t\varphi(\theta)) \longmapsto q = (t\cos\theta, t\sin\theta)$$

ジョルダン曲線

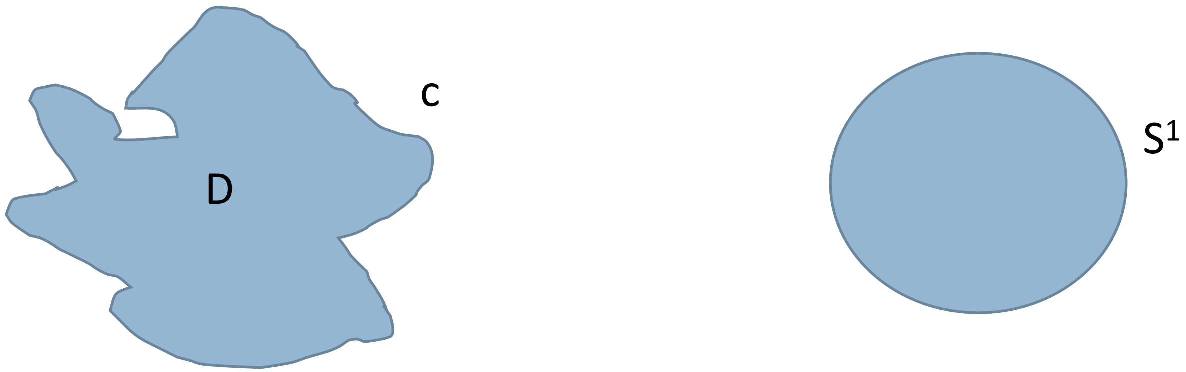
ジョルダン曲線

単位円 S^1 から平面への単射連続写像 $c : S^1 \to \mathbb{R}^2$（の像）

ジョルダン・シェーンフリースの定理

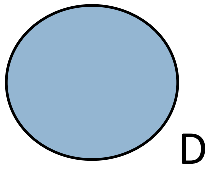
ジョルダン曲線 c の補集合は二つの連結成分からなり、それぞれの連結成分の境界は c に等しい。さらに、この二つの連結成分は単位円の内部と外部に同相である。

ジョルダン曲線は
円板を張る

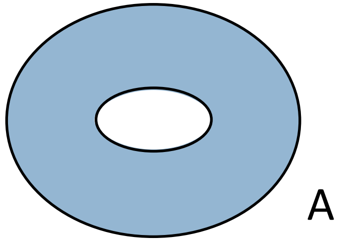


$\exists$ 同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s.t. $f(D) =$ 単位円板

同相でない例：



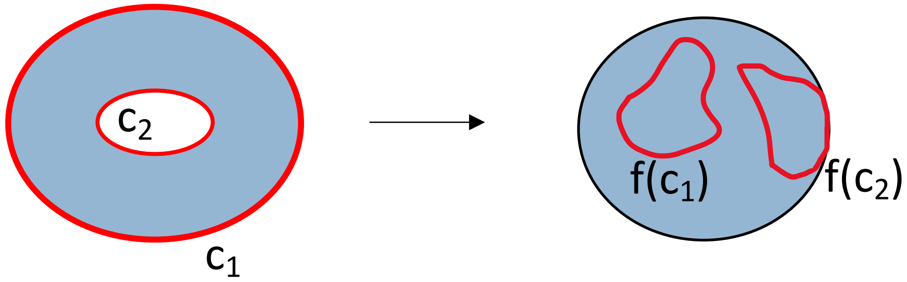
と



は同相ではない。

理由：同相写像が存在すると仮定する

f:

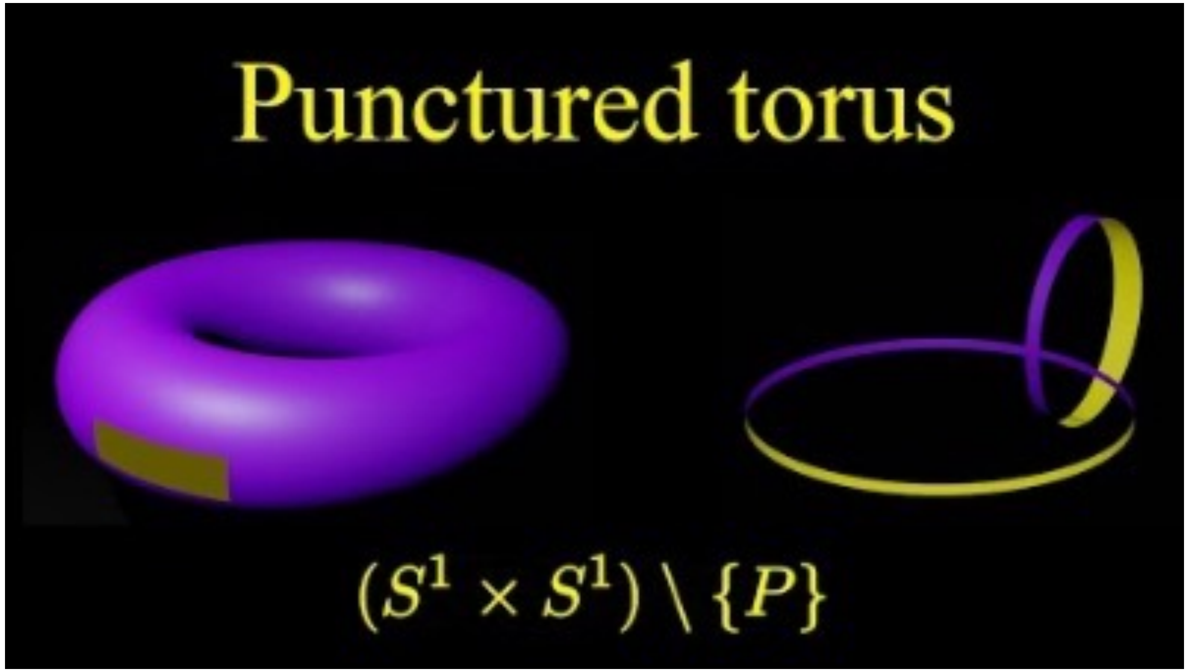


$c_1 \cap c_2 = \emptyset$ と f が全単射より、$f(c_1)$ と $f(c_2)$ は単位円板にあるジョルダン曲線で、共通点を持たない。

ジョルダン・シェーンフリースの定理により、$f(c_1)$ と $f(c_2)$ が共に単位円板の中の（小さい）円板を張る。f は自然に $A\backslash(c_1 \cup c_2)$ と $D\backslash f(c_1) \cup f(c_2)$ の同相写像を誘導する。

$A\backslash(c_1 \cup c_2)$ は開円環面になり、連結である（領域が繋がっている）。一方で、$D\backslash f(c_1) \cup f(c_2)$ は少なくとも二つの連結成分をもつ。よって二者は同相になれない。

同相の例（全同位同値でもある）



トポロジーとは何か？

TOPOLOGY：位置の学問

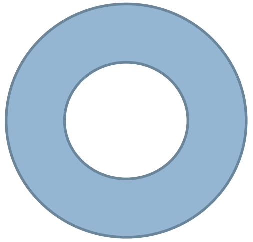
位置　　学問

> トポロジーの考え方：
>
> 図形を伸ばしたり、縮めたり、曲げたりしても、同じ形だと考える。
> つまり図形は伸縮自在の柔らかいゴムの弾性物質でできていると考える。

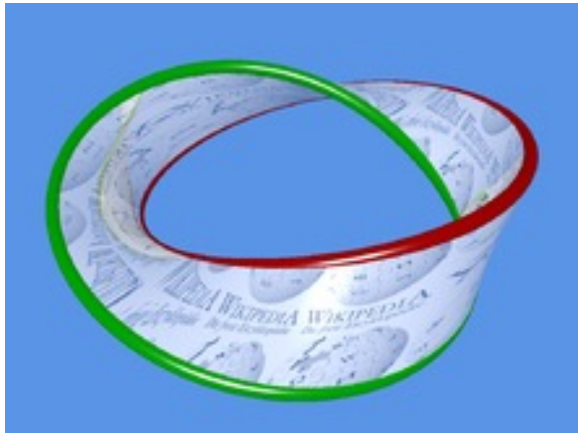
位相幾何学：図形の位置と形相を研究する幾何学

柔らかい幾何学
と呼ばれるにゃ～

位置と形相

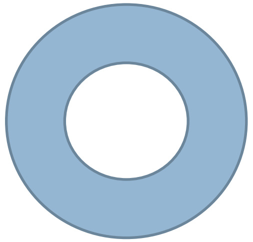


同相
＝

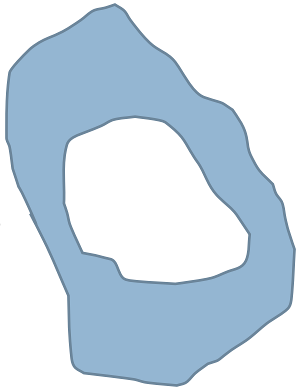


wikidata

- ✓ ハサミとノリを使って良い
- ✓ 位置を考えない



全同位同値
＝

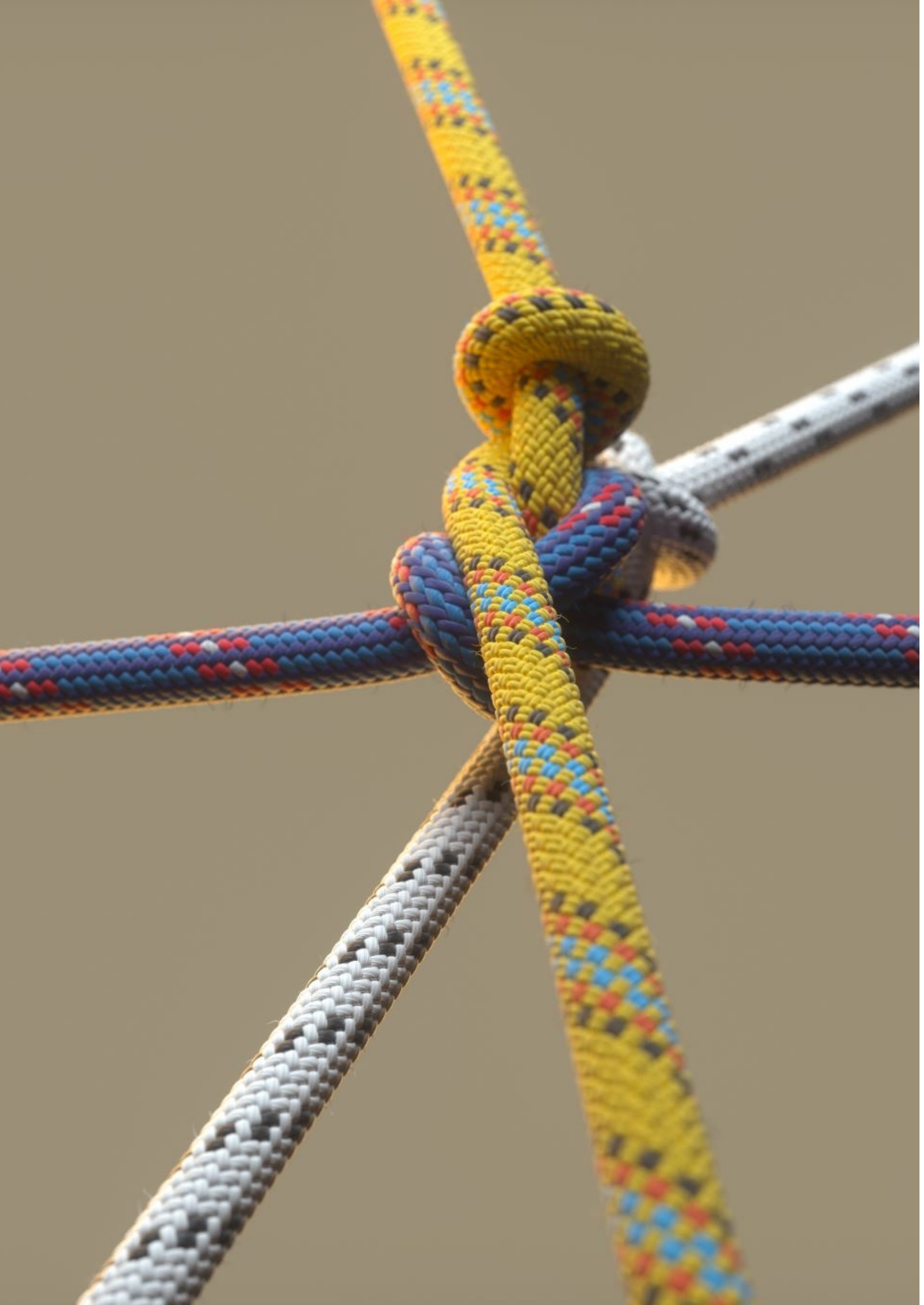


- ✓ ハサミとノリを使っちゃダメ
- ✓ 位置と形相両方を考える
- ✓ 同相である

演習問題：

次の平面図形を同相な関係で分類せよ。

A B C D E F G H I J K
L M N O P Q R S T U V W
X Y Z



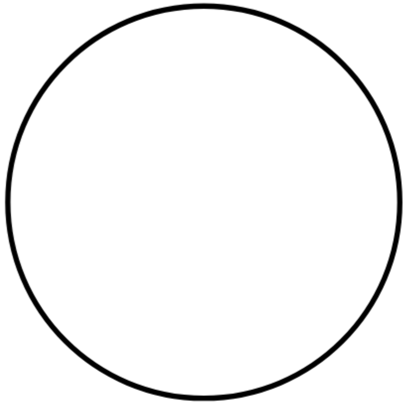
結び目とは何？

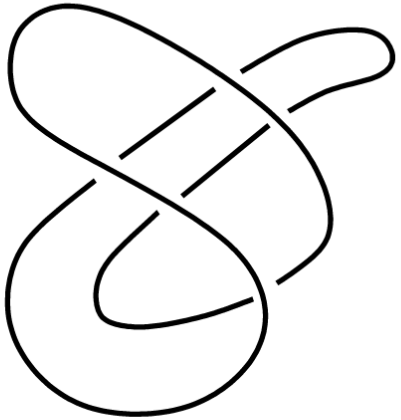
空間の中の閉曲線

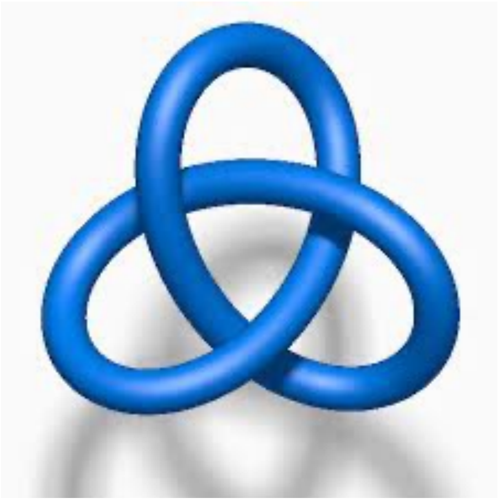
これから全ての写像と曲線が滑らかであると仮定する。平面上のジョルダン曲線は平面上の円板を張ることを説明した。

問題：　3次元空間の中の閉曲線も必ず３次元空間の中の円板を張るか？　答え：NO

考察：







https://horizonofreason.com/science/unknot-diagrams-trivial-knot-collection/

wikipedia

結び目

結び目

単位円 S^1 から空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込み $c : S^1 \to \mathbb{R}^3$ の像

S^1 と $c(S^1)$ の同相を誘導する

ハサミとノリを使わないで
“連続的な”変形で移り合う結び目を
同一視したい。

このような同値類を調べたい。

結び目理論の始まり

光の波動説（19世紀末）：

エーテルという宇宙に満ちている微細物質があり、光は
エーテルの中を伝わる振動である

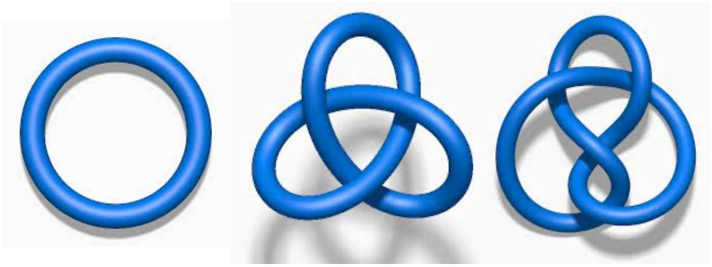
ケルビン卿：原子の渦理論

原子 ⟷ エーテルという流体の中にある渦の作る結び目

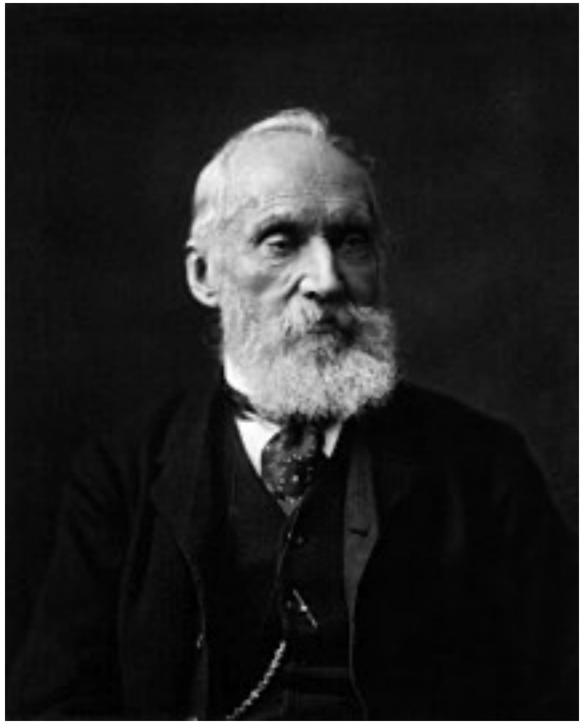
原子の渦理論が正しければ、

原子の分類 ⟷ 結び目の分類

となる



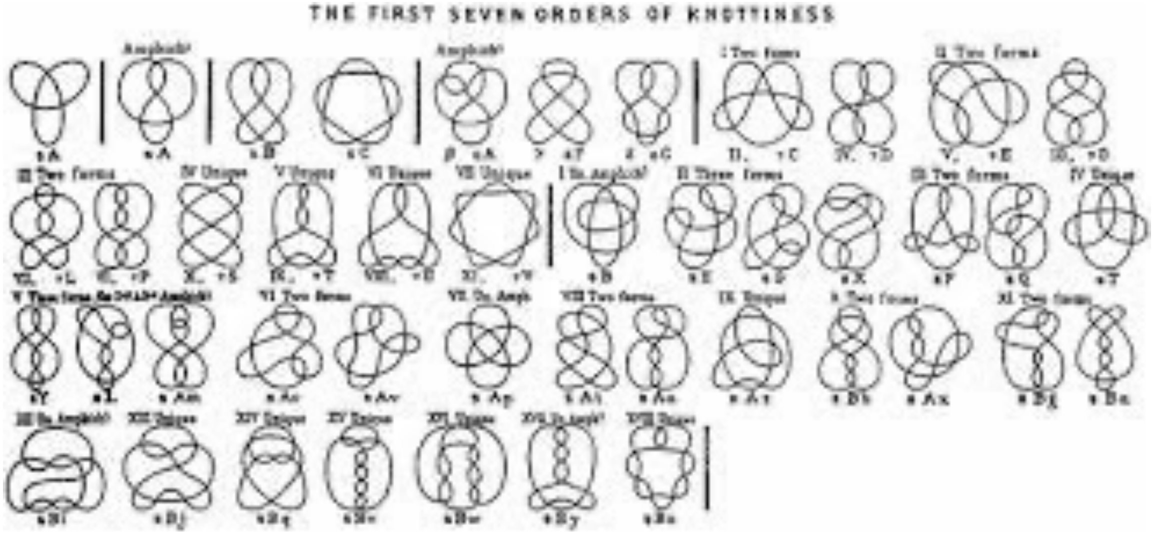
水素　炭素　酸素



William Thomson (1824-1907)
ケルビン卿

絶対温度の導入、
熱力学第二法則の発見など

Peter Guthrie Tait（1831-1901）



結び目の表の一部
（原子の渦理論における元素周期表のようなもの）

ケルビン卿の友人、
結び目の表を作成、
交代結び目に関数るテイト予想を提示した。

早期の貢献者：Thomas Kirkman (1806-1895)
Peter Guthrie Tait
Charles Newton Little (1858-1923)

結び目の同値

結び目の同値

結び目 K と L が（位相的）同値であるとは、$\mathbb{R}^3$ から自身への向きを保つ微分同相写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在して、

$$f(K) = L$$

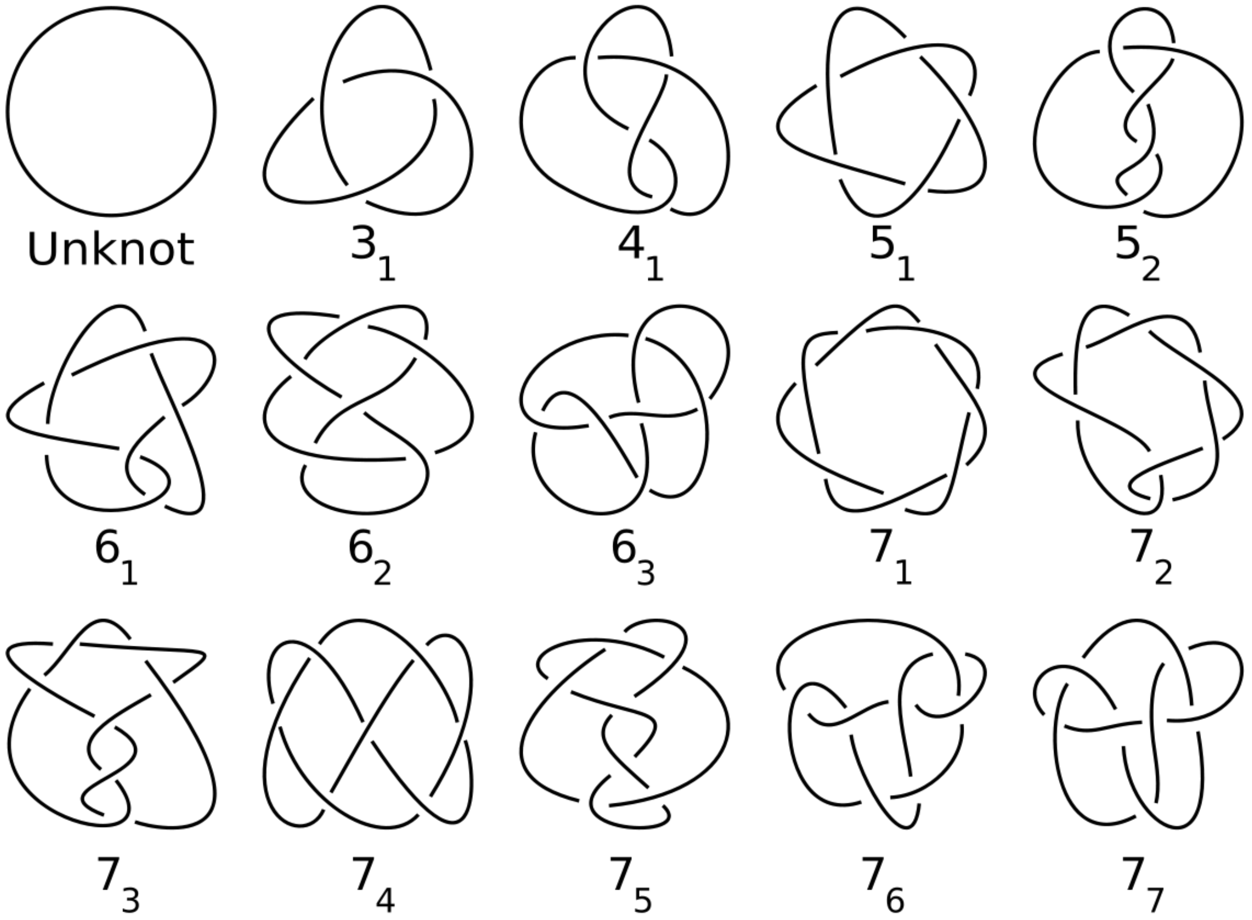
となることをいう。

全同位同値

結び目を表す方法：結び目の図式

交点：

ひもの上下位置関係がわかる！



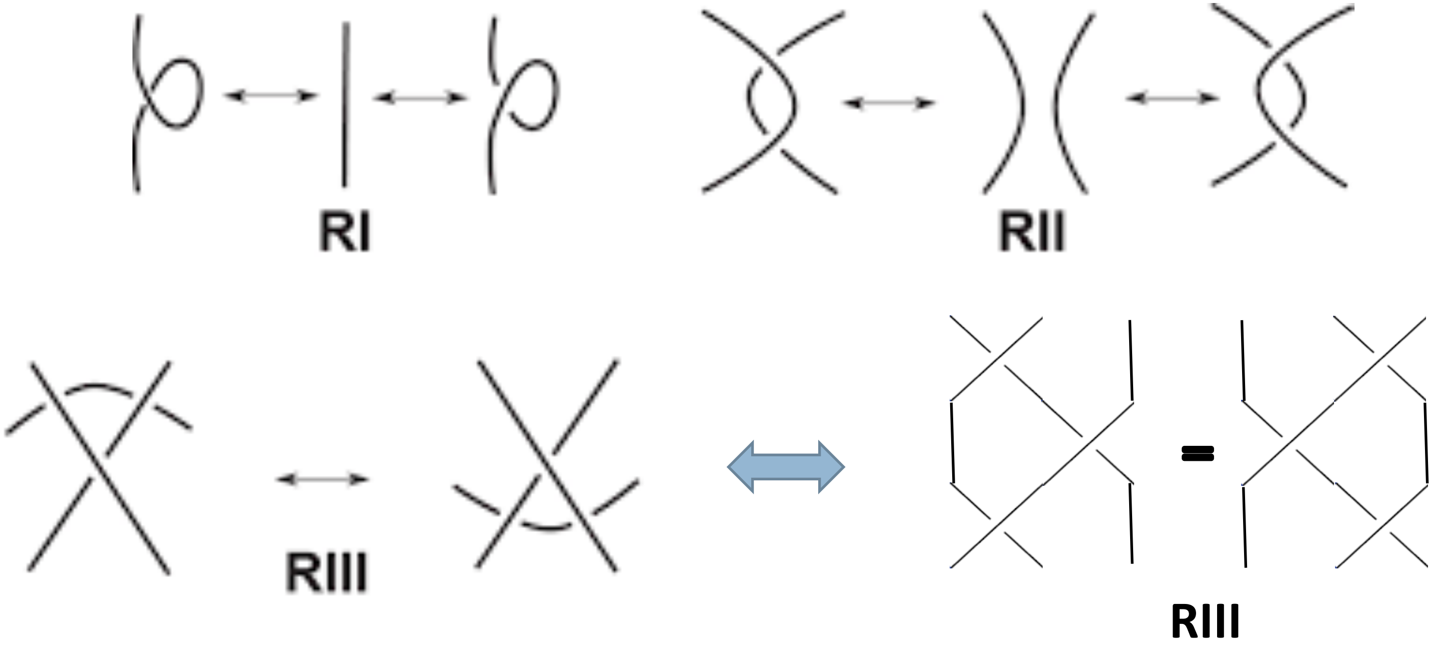
メリット

- 紙の上で結び目を描けて便利
- 数学的にも重要

図式を使って同値を調べる

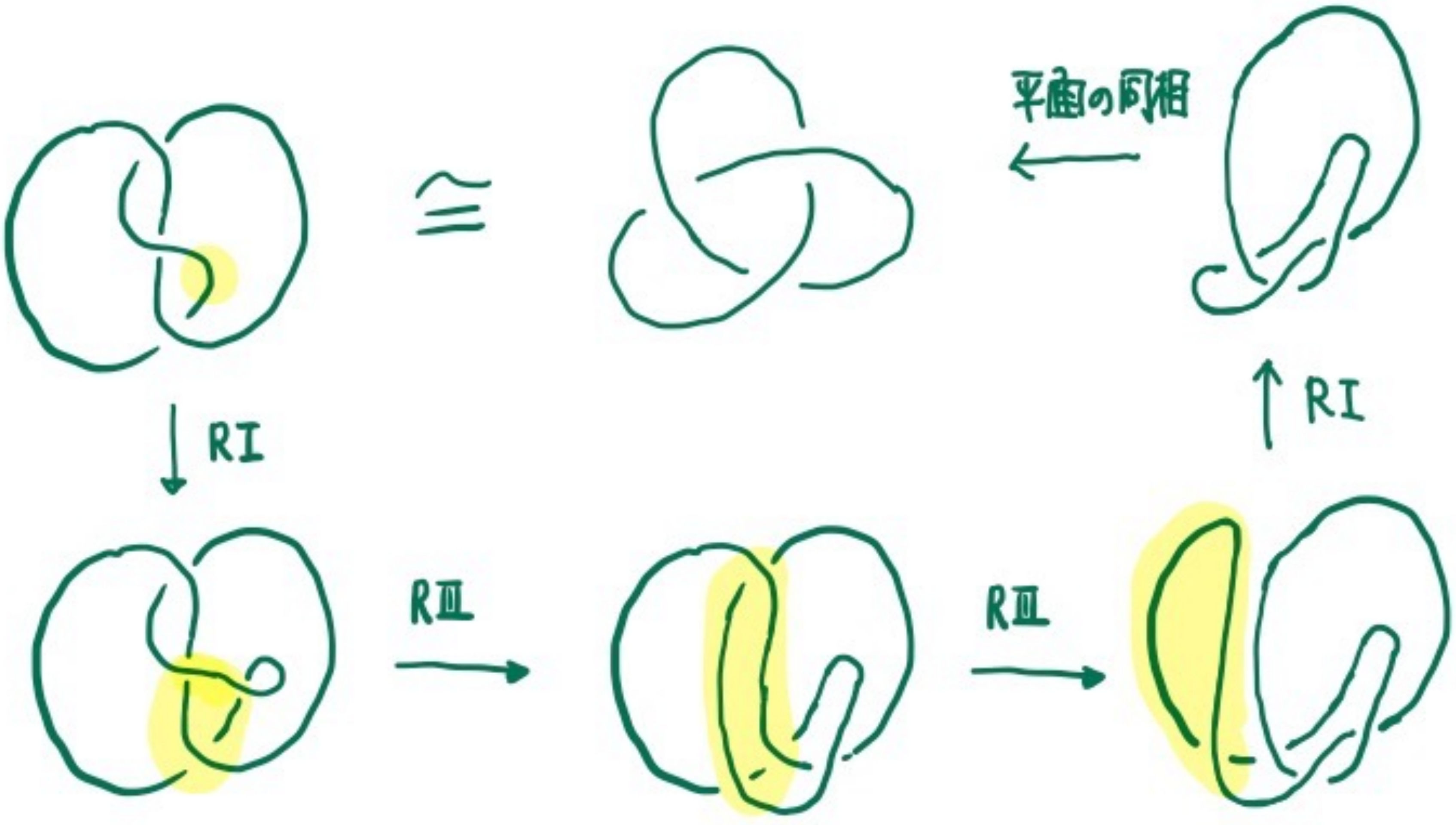
結び目のライデマイスター移動

二つの結び目図式が同値な結び目を表すための必要十分条件は、それらが有限回のライデマイスター移動の繰り返しで移りあうことである。

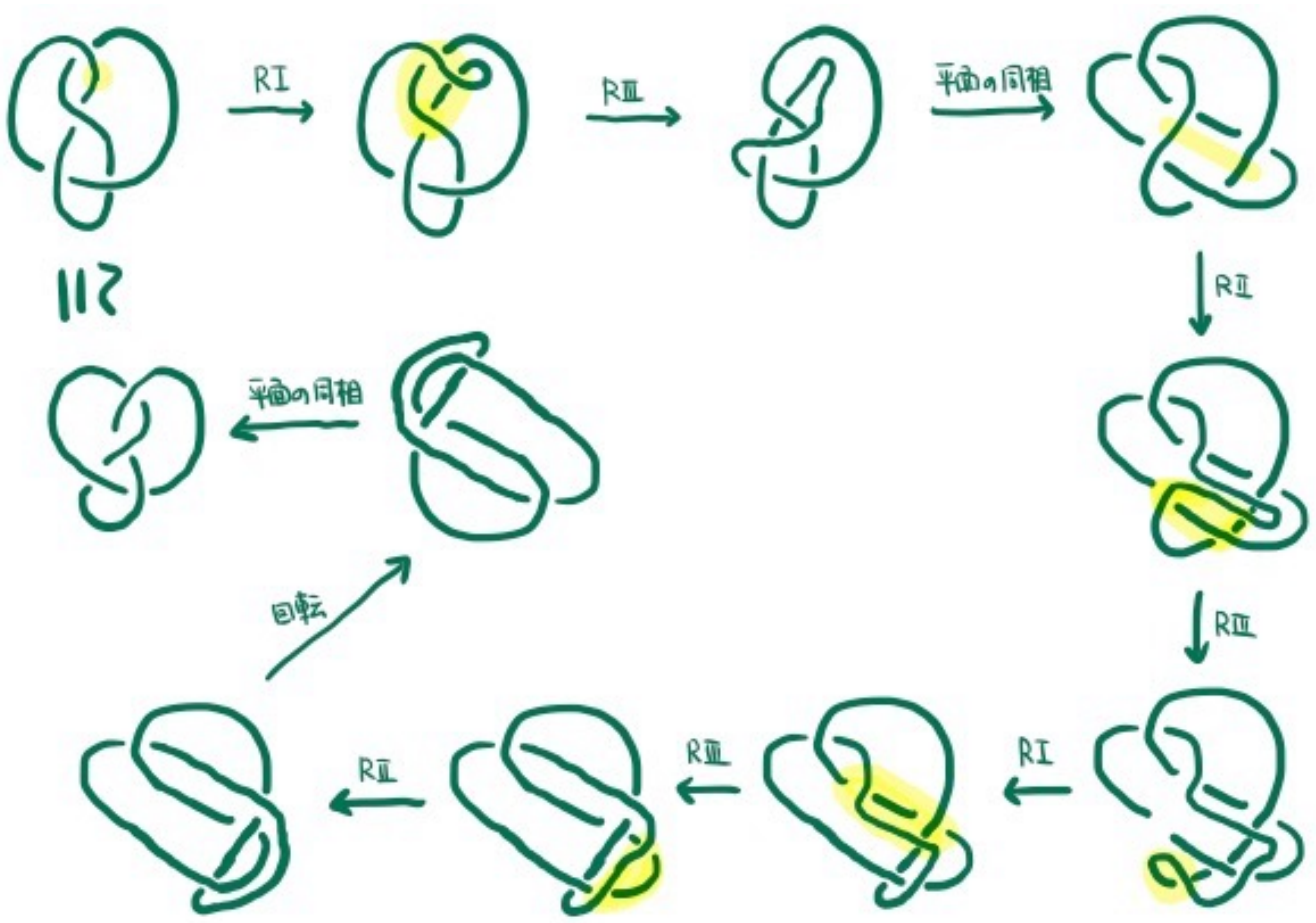


よって、{ 結び目 }/同値 = { 結び目の図式 }/R1, RII, RIII

例1：ライデマイスター移動を使って結び目の図式の同値を証明する



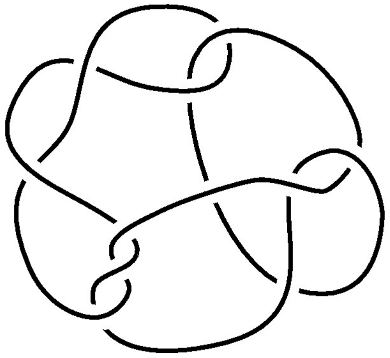
例2：



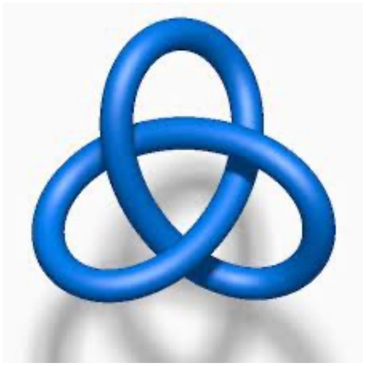
結び目理論の基本問題

今までの話のまとめ：	平面と違って、空間中にはほどけない閉曲線が存在する。（ほどけない＝円板を張らない）
	“連続的な”変形で移り合う閉曲線を同一視したい。ハサミを使わない（つまり結び方が大事！）
	空間中の結び目は平面上の結び目図式で表すことができる。
	結び目の同値はライデマイスター移動で調べることができる。

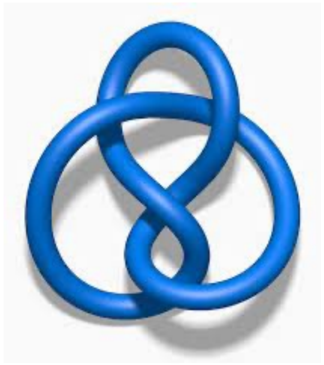
- 与えられた結び目はほどけるか？
- 二つ与えられた結び目は同値か？
- 結び目と３次元多様体の相互関係
- などなど



解けている？



3_1



4_1

違う結び目？

数学的に証明したい

結び目不変量

Aはベクトル空間、群、
環、ホモロジーなど

不変量の定義

写像 $F : \{ \text{結び目} \} \to A$ s.t.

$$K \text{ と } L \text{ が同値} \implies F(K) = F(L) \in A$$

のとき、写像 F による像は結び目の不変量になる。

図式から不変量を定義する

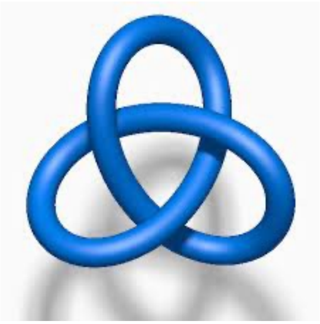
写像 $F : \{ \text{結び目の図式} \} \to A$ s.t.

$$D_1 \text{ と } D_2 \text{ がライデマイスター移動で繋がる} \implies F(D_1) = F(D_2) \in A$$

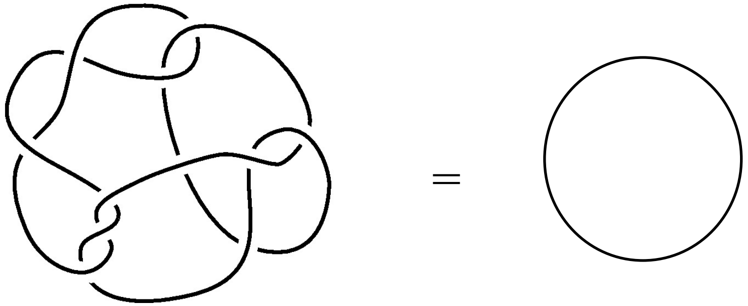
のとき、写像 F による像は結び目の不変量になる。

組み合わせ的な不変量の例：

結び目の交点数 $c(K)$：K を表す結び目図式の交差点数の最小値



c(K)=3



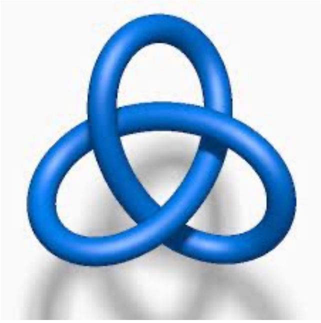
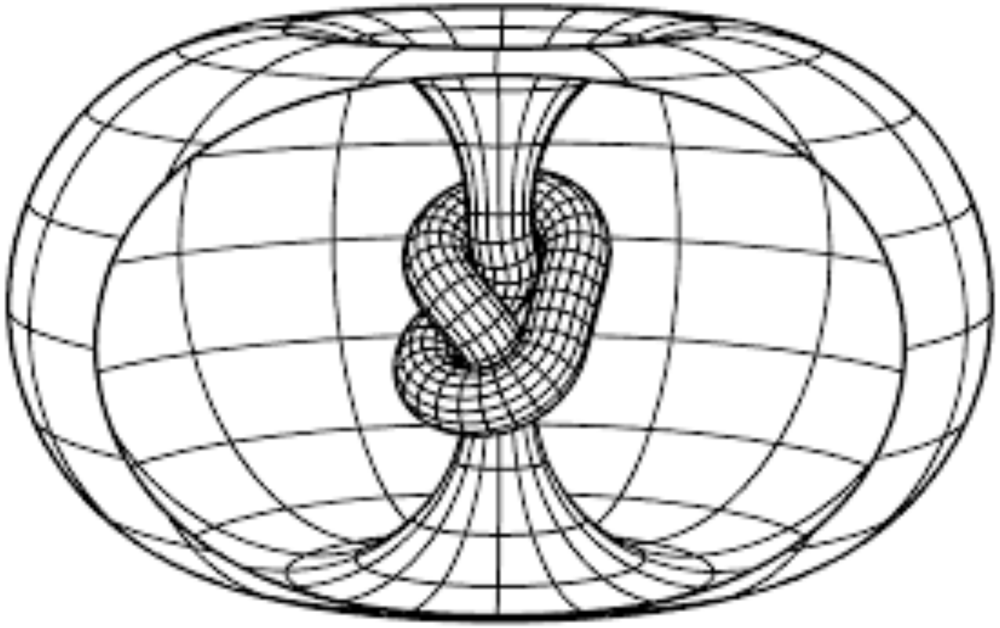
c(K)=0

代数トポロジーからくる不変量の例：

結び目群＝基本群 $\pi_1(S^3\backslash K, p)$

$S^3\backslash K$：３次元球面（３次元空間＋無限遠点）

の中から K の近傍を取り除いたもの

$S^3 \backslash$  = 

写真：日本数学会

不変量の研究

80年代以前：古典的結び目理論

- 組み合わせ的な不変量
- ３次元多様体の不変量を結び目の補空間に適用して得たもの

80年代以降：量子トポロジー

- Jones多項式の発見
- 量子群
- Yang-Baxter方程式
- Kontsevich不変量
- Vassiliev不変量

などなど

入門的な話をこの講義で紹介する

2000年以降：

- Khovanovホモロジー
- 量子不変量の圏化
- Heegaard Floer ホモロジー
- 体積予想

などなど

他に、
結び目と双曲幾何
結び目と素数
結び目とゲージ理論
など　様々な研究テーマがあります。